Université Paris-Est Créteil – Val de Marne **Année 2016-2017**
Faculté des Sciences et Technologie

Master Sciences - Technologie - Santé
Mention Mécanique
Parcours : MS2
(Modélisation et Simulation en Mécanique des Solides)

Épreuve sur le cours
Comportement des systèmes multiphysiques

première session – janvier

Les documents de cours et de TD sont autorisés.

Exercice 1

On considère deux états d'équilibre d'un milieu continu ; on les note par des indices 1 et 2. On note $\mathbb{F}_{1\to 2}$ le tenseur gradient de la déformation qui fait passer des états 1 à 2. Lorsque ces deux états sont infiniment voisins on définit $\mathbb{F}_{1\to 2}$ par la relation :

$$\mathbb{F}_{1\to 2} = \mathbb{I} + d\mathbb{X}, \tag{1}$$

où $\mathbb{I}$ est le tenseur identité et $\mathbb{X}$ un tenseur du 2e ordre.

Dans toute la suite, on néglige les termes du second ordre par rapport à $d\mathbb{X}$. On admet que pour le milieu continu en question la forme travail spécifique (c'est-à-dire par unité de masse) réversible peut s'écrire :

$$w = \frac{1}{2\rho_r}\mathtt{Tra}\,(\boldsymbol{\sigma}\,(d\mathbb{X} + d\mathbb{X}^T)), \tag{2}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy.

On note respectivement $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F} + d\mathbb{F}$ les tenseurs gradients des déformations qui font passer de la configuration de référence aux configurations d'équilibre 1 et 2.

1°) Donner la dimension physique de $\mathbb{X}$.

2°) Établir une relation entre $\mathbb{F}, d\mathbb{F}$ et $d\mathbb{X}$.

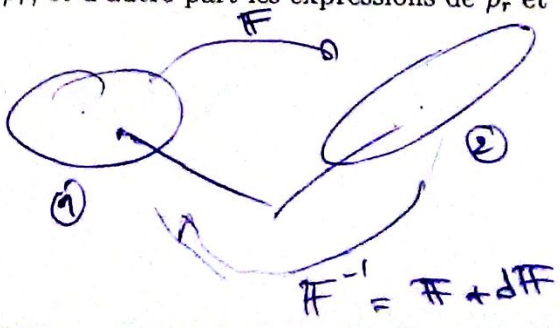
3°) On note $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} + d\mathbb{C}$ les tenseurs de Cauchy-Green droit associés respectivement à $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F} + d\mathbb{F}$. Expliciter $d\mathbb{C}$ en fonction de $\mathbb{F}$ et $d\mathbb{X}$.

4°) Montrer que la forme w peut s'écrire :

$$w = \frac{1}{2\rho_r}\mathtt{Tra}\,(\boldsymbol{\sigma}_K\, d\mathbb{C}), \tag{3}$$

en précisant d'une part la dimension physique de ρ_r, et d'autre part les expressions de ρ_r et $\boldsymbol{\sigma}_K$.

$\frac{\partial x_i}{\partial X_\theta}$



Exercice 2

Dans le cadre de la théorie des mélanges développée en mécanique des milieux continus, montrer que l'on a la relation :

$$\rho\,\mathbb{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \{\rho_\alpha\,\mathbb{L}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathtt{grad}\ \rho_\alpha\}, \tag{1}$$

où ρ_α désigne la densité volumique de masse, $\mathbf{w}_\alpha$ le champ de vitesse de diffusion et $\mathbb{L}_\alpha$ le tenseur gradient du champ des vitesses de l'espèce α.

Exercice 3

On considère un milieu continu tridimensionnel en mouvement. On note $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes, $\boldsymbol{\gamma}$ le vecteur accélération et $\mathbf{f}$ le vecteur densité massique de forces extérieures. On désigne par $\psi(\mathbf{x}, t)$ un champ scalaire eulérien arbitraire. Soient $\mathscr{D}$ un domaine, qui est un volume occupé par le milieu et $\partial\mathscr{D}$ la surface de ce domaine dont la normale unitaire extérieure est $\mathbf{n}$.

1°) Établir la relation :

$$\int_{\partial\mathscr{D}} \psi\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}\,dS = \int_{\mathscr{D}} (\boldsymbol{\sigma}\,\mathtt{grad}\ \psi + \psi\,\rho\,(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{f}))\ dv. \tag{1}$$

où dS et dv désignent respectivement les éléments différentiels de surface et de volume, $\mathtt{grad}$ l'opérateur gradient et ρ la densité volumique de masse du milieu continu.

2°) On définit la moyenne $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ de $\boldsymbol{\sigma}$ sur $\mathscr{D}$ comme étant donnée par la relation :

$$|\,v_{\mathscr{D}}\,|\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\mathscr{D}} \boldsymbol{\sigma}\,dv, \tag{2}$$

où $|\,v_{\mathscr{D}}\,|$ désigne le volume du domaine $\mathscr{D}$. On définit aussi le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ par la relation :

$$|\,v_{\mathscr{D}}\,|\ \boldsymbol{\tau}^T = \int_{\partial\mathscr{D}} \mathbf{x} \otimes \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n}\,dS - \int_{\mathscr{D}} \mathbf{x} \otimes \rho\,(\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{f})\,dv, \tag{3}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur position et $\otimes$ désigne l'opérateur de produit tensoriel entre deux vecteurs.

Montrer que l'on a la relation :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\tau}. \tag{4}$$

3°) On suppose que $\mathscr{D}$ englobe tout le milieu continu considéré, lequel est en équilibre sous l'action de deux forces égales et opposées $\mathbf{T}$ appliquée au point P de $\partial\mathscr{D}$ et $-\mathbf{T}$ appliquée au point Q de $\partial\mathscr{D}$. On considère ces deux forces, concentrées en des points de la surface qui limite le milieu continu, comme la limite de forces réparties sur des petites aires de la surface avec une intensité très grande. On suppose qu'il n'y a pas de force de volume.

Montrer, par application de la question précédente que la moyenne $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sur tout le milieu continu du tenseur des contraintes s'exprime simplement à l'aide du vecteur $\mathbf{T}$ d'une part, de données géométriques relatives au domaine occupé par le milieu continu et aux points P et Q d'autre part.

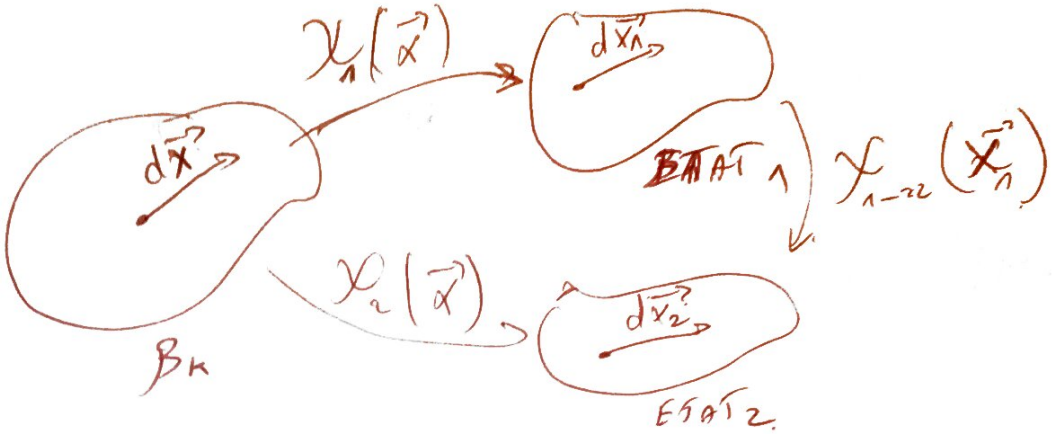
CSMP:

Exercice 1:

1) $[F] = [L \cdot L^{-1} = C]$

$\Leftrightarrow dX$: adimensionnel.

2)



$d\vec{x}_1 = \mathbb{F}\, d\vec{x}$ ... (1)

$d\vec{x}_2 = (\mathbb{F} + d\mathbb{F})\, d\vec{x}$ ... (2)

$d\vec{x}_2 = (\mathbb{I} + d\mathbb{X})\, d\vec{x}_1$ (3)

(2) = (3) $\Leftrightarrow (\mathbb{F} + d\mathbb{F})\, d\vec{x} = (\mathbb{I} + d\mathbb{X})\, d\vec{x}_1$ ... (4)

(3) dans (2) $\Leftrightarrow (\mathbb{F} + d\mathbb{F})\, d\vec{x} = (\mathbb{I} + d\mathbb{X})\, \mathbb{F}\, dX$

$\Leftrightarrow \boxed{(\mathbb{F} + d\mathbb{F}) = (\mathbb{I} + d\mathbb{X})\mathbb{F}} \Leftrightarrow \boxed{d\mathbb{F} = d\mathbb{X}\, \mathbb{F}}$

3) $\mathbb{C} = \mathbb{F}^T \mathbb{F}$ ... (5)

$\mathbb{C} + d\mathbb{C} = (\mathbb{F} + d\mathbb{F})^T \otimes (\mathbb{F} + d\mathbb{F})$ (6)

$\mathbb{F}^T \mathbb{I} \mathbb{F}$

(5) dans (6) $\Leftrightarrow d\mathbb{C} = (\mathbb{F} + d\mathbb{F})^T (\mathbb{I} + d\mathbb{X})\mathbb{F} - \mathbb{F}^T\mathbb{F}$

$d\mathbb{C} = ((\mathbb{I} + d\mathbb{X})\mathbb{F})^T (\mathbb{I} + d\mathbb{X})\mathbb{F} - \mathbb{F}^T \mathbb{F}$

$$d\mathbb{C} = \mathbb{F}^T\left[(\mathbb{I} + d\mathbb{X})^T(\mathbb{I} + d\mathbb{X}) - \mathbb{I}\right]\mathbb{F}$$

$$d\mathbb{C} = \mathbb{F}^T\left[\cancel{\mathbb{I}} + d\mathbb{X}^T + d\mathbb{X} + \underbrace{\cancel{d\mathbb{X}^T d\mathbb{X}}}_{\text{ordre } 2} - \cancel{\mathbb{I}}\right]\mathbb{F}$$

$$\boxed{d\mathbb{C} = \mathbb{F}^T\left(d\mathbb{X}^T + d\mathbb{X}\right)\mathbb{F}} \quad \ldots (7)$$

4) $$w = \frac{1}{2\rho_r}\,\mathrm{Tra}\left(\sigma\left(d\mathbb{X} + d\mathbb{X}^T\right)\right) \quad \ldots (8)$$

d'après (7) $$d\mathbb{X}^T + d\mathbb{X} = (\mathbb{F}^T)^{-1}\, d\mathbb{C}\, \mathbb{F}^{-1} \quad \ldots (9)$$

$$w = \frac{1}{2\rho_r}\,\mathrm{Tra}\Big(\underbrace{\sigma\,\mathbb{F}^{-T}\, d\mathbb{C}}_{A}\ \underbrace{\mathbb{F}^{-1}}_{B}\Big)$$

$$\mathrm{Tra}(AB) = \mathrm{Tra}(BA)$$

$$w = \frac{1}{2\rho_r}\,\mathrm{Tra}\Big(\underbrace{\mathbb{F}^{-1}\sigma\,\mathbb{F}^{-T}}_{\sigma_R}\, d\mathbb{C}\Big)$$

$$w = \frac{1}{2\rho_r}\,\mathrm{Tra}\left(\sigma_R\, d\mathbb{C}\right) \qquad \Big|\ \sigma_R = \mathbb{F}^{-1}\sigma\,\mathbb{F}^{-T}$$

$$[w] = \cancel{M}LT^{-2}L\cancel{M^{-1}} = L^2T^{-2}$$

$$[\sigma_R] = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\rho_r] = \frac{[\sigma_R]}{[w]} = \frac{ML^{-1}\cancel{T^{-2}}}{L^2\cancel{T^{-2}}} = ML^{-3}$$ masse volumique.

Exercice 2 :

Montrer que $\rho \mathbb{L} = \sum \{ \rho_\alpha \mathbb{L}_\alpha + w_\alpha \otimes \text{grad}\, \rho_\alpha \}$

$$\mathbb{L} = \text{grad}\, \vec{v}$$

$$\sum \{ \rho_\alpha \mathbb{L}_\alpha + w_\alpha \otimes \text{grad}\, \rho_\alpha \} = \sum \{ \rho_\alpha \text{grad}\, V_\alpha + w_\alpha \otimes \text{grad}\, \rho_\alpha \}$$

$$\boxed{w_\alpha = v - V_\alpha} \Longrightarrow = \sum \{ \rho_\alpha \text{grad}\, V_\alpha + V_\alpha \otimes \text{grad}\, \rho_\alpha - v \otimes \text{grad}\, \rho_\alpha \}$$

$$\boxed{\text{grad}(\rho \vec{u}) = \rho\, \text{grad}\, \vec{u} + \vec{u} \otimes \text{grad}\, \rho} \Longrightarrow \sum \{ \text{grad}(\rho_\alpha V_\alpha) - v \otimes \text{grad}\, \rho_\alpha \}$$

$$\sum \text{grad}(\vec{u}) = \text{grad}(\sum \vec{u})$$

$$\Rightarrow \sum \{ \text{grad}(\rho \vec{v}) - \vec{v} \otimes \text{grad}(\sum \rho_\alpha) \}$$

$$\Rightarrow \text{grad}(\rho \vec{v}) - \vec{v} \otimes \text{grad}(\rho)$$

$$\Rightarrow \rho\, \text{grad}\, \vec{v} + \cancel{\vec{v} \otimes \text{grad}\, \rho} - \cancel{\vec{v} \otimes \text{grad}\, \rho}$$

$$\Longleftrightarrow \rho\, \text{grad}\, \vec{v} = \rho \mathbb{L}$$